Naturaleza y Tecnología
Septiembre Diciembre 2022
ISSN 2007-672X
Universidad de Guanajuato

Construcción de funciones a partir del concepto de dependencia

Héctor Ismael Olmos Castillo, Departamento de Ingeniería Química en Guanajuato, Universidad de Guanajuato, Col. Noria Alta S/N, Guanajuato, Gto. México 36050

Resumen

En éste escrito se muestra cómo a partir de puntos, y determinantes se puede sintetizar una función que pase por esos puntos. En el escrito se muestran la definición del concepto así como casos de estudio.

Abstract

In this paper, it is shown how from points and determinants a function that passes through those points can be synthesized. The writing shows the definition of the concept as well as case studies.

Introducción

Un concepto básico de algebra lineal es el de dependencia lineal, un vector es dependiente de otros si éste es una combinación lineal de los anteriores.

Considérese el vector V=3i+2j-k y dos vectores V1=2i-4j+k, V2=i+6j-3k.

Si V depende de una combinación lineal de V1 y V2 entonces.

$V = aV_1 + bV_2$; Entonces representa tres ecuaciones lineales simultáneas

$$\begin{aligned} i&: \quad 3 = 2a + b \\ j&: \; 2 = -4a + 6b \\ k&: \; -1 = a - 3b \end{aligned}$$

Puede mostrarse no importa si se resuelve las ecuaciones entre i y j; entre j y k o entre i y k el resultado siempre es el mismo a=1; b=1. Esto implica que el vector V es dependiente de V1 y V2.

El determinante es una herramienta matemática que se usa para verificar si una serie de vectores son dependientes o son independientes entre sí. Así los tres vectores V, V1 y V2, pueden arreglarse como un determinante.

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 6 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

El valor del determinante cuando hay dependencia lineal es cero, pero si los vectores son independientes entre sí el determinante es diferente de cero. (Rose, 2002)

Supóngase el caso de que se busque un vector con componentes V3=xi+yj+zk, que dependa de V1 y V2.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} x & 2 & 1 \\ y & -4 & 6 \\ z & 1 & -3 \end{vmatrix} = 6x + 7y + 16z = 0;$$

Es la ecuación de un plano que pasa por el origen 0i+0j+0k, satisface que el determinante sea cero.

Las ecuaciones de dependencia son

$$x = 2a + b$$
$$y = -4a + 6b$$
$$z = a - 3b$$

$$6x + 7y + 16z = 6(2a + b) + 7(-4a + 6b) + 16(a - 3b) = 0$$

$$12a - 28a + 16a = 0$$

$$6b + 42b - 48b = 0$$

Con lo que se comprueba que determinante igual a cero implica dependencia lineal.

Puede comprobarse que si el valor de z se fija en 1, la ecuación calculada sería la ecuación de una recta, en el plano xy, pero que sólo es válida cuando z=1.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix} \to \begin{vmatrix} x & 2 & 1 \\ y & -4 & 6 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 6x + 7y + 16 = 0; \;\; y = -\frac{6}{7}x - \frac{16}{7}$$

La cual satisface para el valor de x=2 , con y=-4

$$y = -\frac{6}{7}x - \frac{16}{7}$$
$$y = -\frac{6}{7}2 - \frac{16}{7} = -4$$
$$y = -\frac{6}{7}(1) - \frac{16}{7} = -\frac{22}{7} \neq 6 \; porque \; z = -3; z \neq 1$$

Pero si se hace y=1, se obtiene la ecuación de la recta en el plano xz pero sólo válida para y=1, nótese que los dos vectores fuente ninguno de ellos tiene y=1.

$$\begin{bmatrix} x \\ 1 \\ z \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix} \to \begin{vmatrix} x & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 6 \\ z & 1 & -3 \end{vmatrix} = 6x + 7 + 16z = 0; \;\; z = -\frac{6}{16}x - \frac{7}{16}$$

$$z = -\frac{6}{16}x - \frac{7}{16}$$
$$x = 2; z = -\frac{6}{16}(2) - \frac{7}{16} = -\frac{19}{16} \neq 1 \; porque \; y \neq 1$$
$$x = 1; z = -\frac{6}{16}(1) - \frac{7}{16} = -\frac{13}{16} \neq -3 \; porque \; y \neq 1$$

Haciendo x=1

Naturaleza y Tecnología
Septiembre Diciembre 2022
ISSN 2007-672X
Universidad de Guanajuato

$$\begin{bmatrix}1\\y\\z\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\-4\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\6\\-3\end{bmatrix}\rightarrow\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ y & -4 & 6\\ z & 1 & -3\end{vmatrix}=6+7y+16z=0; z=-\tfrac{7}{16}y-\tfrac{6}{16};$$

$$z=-\frac{7}{16}y-\frac{6}{16}$$

$$y=-4; z=-\frac{7}{16}(-4)-\frac{6}{16}=\frac{22}{16}\neq 1\ porque\ x=2$$

$$y=6; z=-\frac{7}{16}(6)-\frac{6}{16}=-\frac{48}{16}=-3$$

Las tres ecuaciones de la recta en xy, xz y yz es posibles integrarlas en una sola función, la recta en el espacio.

$$\begin{bmatrix} y=-\frac{6}{7}x-\frac{16}{7}\rightarrow-\frac{6x}{16}-\frac{7y}{16}=1\\ z=-\frac{6}{16}x-\frac{7}{16}\rightarrow-\frac{6}{7}x-\frac{16}{7}z=1\\ z=-\frac{7}{16}y-\frac{6}{16}\rightarrow-\frac{16}{6}z-\frac{7}{6}y=1\end{bmatrix}\rightarrow\boldsymbol{\frac{6}{16}x+\frac{7}{16}y=\frac{6}{7}x+\frac{16}{7}z=\frac{16}{6}z+\frac{7}{6}y}$$

Casos de estudio

Un primer caso de estudio se refiere a encontrar los parámetros de una cuadrática que pasa por los puntos experimentales P1(1,3,1), P2(8,3,1) P3(4,4,9), P4(1,2,3), P5(8,9,4). El tipo de ecuación es $Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Eyz+Fzx+G=0$

El determinante de dependencia a usar para encontrar los valores de A,B,C,D,E,F y G es:

$$\begin{array}{c} Experimentales\\ P_1(1,3,1)\\ P_2(8,3,1)\\ P_3(4,4,9)\\ P_4(1,2,3)\\ P_5(8,9,4)\\ P_6(3,1,7)\end{array}\begin{vmatrix} x^2 & y^2 & z^2 & xy & yz & zx & 1\\ 1^2 & 3^2 & 1^2 & 1\cdot 3 & 3\cdot 1 & 1 & 1\\ 8^2 & 3^2 & 1^2 & 8\cdot 3 & 3\cdot 1 & 8\cdot 1 & 1\\ 4^2 & 4^2 & 9^2 & 4\cdot 4 & 4\cdot 9 & 4\cdot 9 & 1\\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & 1\cdot 2 & 2\cdot 3 & 1\cdot 3 & 1\\ 8^2 & 9^2 & 4^2 & 8\cdot 9 & 9\cdot 4 & 8\cdot 4 & 1\\ 3^2 & 1^2 & 7^2 & 3\cdot 1 & 1\cdot 7 & 3\cdot 7 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x^2 & y^2 & z^2 & xy & yz & zx & 1\\ 1 & 9 & 1 & 3 & 3 & 1 & 1\\ 64 & 9 & 1 & 24 & 3 & 8 & 1\\ 16 & 16 & 81 & 16 & 36 & 36 & 1\\ 1 & 4 & 9 & 2 & 6 & 3 & 1\\ 64 & 81 & 16 & 72 & 36 & 32 & 1\\ 9 & 1 & 49 & 3 & 7 & 21 & 1\end{vmatrix}=$$

Usando la expansión de Laplace. (Poole, 2005)

Naturaleza y Tecnología
Septiembre Diciembre 2022
ISSN 2007-672X
Universidad de Guanajuato

$$x^2\begin{vmatrix} 9 & 1 & 3 & 3 & 1 & 1 \\ 9 & 1 & 24 & 3 & 8 & 1 \\ 16 & 81 & 16 & 36 & 36 & 1 \\ 4 & 9 & 2 & 6 & 3 & 1 \\ 81 & 16 & 72 & 36 & 32 & 1 \\ 1 & 49 & 3 & 7 & 21 & 1 \end{vmatrix} - y^2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 & 1 & 1 \\ 64 & 1 & 24 & 3 & 8 & 1 \\ 16 & 81 & 16 & 36 & 36 & 1 \\ 1 & 9 & 2 & 6 & 3 & 1 \\ 64 & 16 & 72 & 36 & 32 & 1 \\ 9 & 49 & 3 & 7 & 21 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$z^2\begin{vmatrix} 1 & 9 & 3 & 3 & 1 & 1 \\ 64 & 9 & 24 & 3 & 8 & 1 \\ 16 & 16 & 16 & 36 & 36 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 6 & 3 & 1 \\ 64 & 81 & 72 & 36 & 32 & 1 \\ 9 & 1 & 3 & 7 & 21 & 1 \end{vmatrix} - xy\begin{vmatrix} 1 & 9 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 64 & 9 & 1 & 3 & 8 & 1 \\ 16 & 16 & 81 & 36 & 36 & 1 \\ 1 & 4 & 9 & 6 & 3 & 1 \\ 64 & 81 & 16 & 36 & 32 & 1 \\ 9 & 1 & 49 & 7 & 21 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$yz\begin{vmatrix} 1 & 9 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 64 & 9 & 1 & 24 & 8 & 1 \\ 16 & 16 & 81 & 16 & 36 & 1 \\ 1 & 4 & 9 & 2 & 3 & 1 \\ 64 & 81 & 16 & 72 & 32 & 1 \\ 9 & 1 & 49 & 3 & 21 & 1 \end{vmatrix} - zx\begin{vmatrix} 1 & 9 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 64 & 9 & 1 & 24 & 3 & 1 \\ 16 & 16 & 81 & 16 & 36 & 1 \\ 1 & 4 & 9 & 2 & 6 & 1 \\ 64 & 81 & 16 & 72 & 32 & 1 \\ 9 & 1 & 49 & 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 9 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 64 & 9 & 1 & 24 & 3 & 8 \\ 16 & 16 & 81 & 16 & 36 & 36 \\ 1 & 4 & 9 & 2 & 6 & 3 \\ 64 & 81 & 16 & 72 & 32 & 32 \\ 9 & 1 & 49 & 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 292572x^2 + 1401708y^2 + 3696924z^2 + 1832544xy -$$

$$1490916yz - 8130780xz - 9498972 = 0$$

Dividiendo toda la ecuación entre 292572.

$$x^2 + \left(4 + \frac{193}{244}\right)y^2 + \left(12 + \frac{138}{217}\right)z^2 + \left(6 + \frac{34}{129}\right)xy - \left(5 + \frac{7}{73}\right)yz - \left(24 + \frac{34}{43}\right)xz - \left(32 + \frac{135}{289}\right) = 0$$

La ecuación debe de satisfacer cada uno de los puntos.

$$P_1(1,3,1): 1 + \left(4 + \frac{193}{244}\right)9 + \left(12 + \frac{138}{217}\right)1 + \left(6 + \frac{34}{129}\right)3 - \left(5 + \frac{7}{73}\right)3 - \left(24 + \frac{34}{43}\right)1 - \left(32 + \frac{135}{289}\right) = 0$$

$$P_2(8,3,1): 64 + \left(4 + \frac{193}{244}\right)9 + \left(12 + \frac{138}{217}\right)1 + \left(6 + \frac{34}{129}\right)24 - \left(5 + \frac{7}{73}\right)3 - \left(24 + \frac{34}{43}\right)8 - \left(32 + \frac{135}{289}\right) = 0$$

$$P_3(4,4,9): 16 + \left(4 + \frac{193}{244}\right)16 + \left(12 + \frac{138}{217}\right)81 + \left(6 + \frac{34}{129}\right)16 - \left(5 + \frac{7}{73}\right)36 - \left(24 + \frac{34}{43}\right)36 - \left(32 + \frac{135}{289}\right) = 0$$

$$P_4(1,2,3): 1 + \left(4 + \frac{193}{244}\right)4 + \left(12 + \frac{138}{217}\right)9 + \left(6 + \frac{34}{129}\right)2 - \left(5 + \frac{7}{73}\right)6 - \left(24 + \frac{34}{43}\right)3 - \left(32 + \frac{135}{289}\right) = 0$$

$$P_5(8,9,4): 64 + \left(4 + \frac{193}{244}\right)81 + \left(12 + \frac{138}{217}\right)16 + \left(6 + \frac{34}{129}\right)72 - \left(5 + \frac{7}{73}\right)36 - \left(24 + \frac{34}{43}\right)32 - \left(32 + \frac{135}{289}\right) = 0$$

$$P_1(3,1,7): 9 + \left(4 + \frac{193}{244}\right)1 + \left(12 + \frac{138}{217}\right)49 + \left(6 + \frac{34}{129}\right)3 - \left(5 + \frac{7}{73}\right)7 - \left(24 + \frac{34}{43}\right)21 - \left(32 + \frac{135}{289}\right) = 0$$

Efectivamente así es por el planteamiento del determinante de dependencia =0

Caso de estudio 2

Una ecuación algebraica no lineal a diferencia de la lineal es que no puede representarse en forma matricial, entonces hay que seguir alguna estrategia para la representación en esa forma, la más común es la linealización, esto es truncar una serie de Taylor que describe perfectamente la función en el primer término.

$$g(x,y,z) = g(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial g}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial g}{\partial z}(z - z_0) + \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\frac{(x - x_0)^2}{2!} + \cdots$$

El truncamiento implica que el cálculo de la función no sea exacto, pero esta estrategia se emplea muy comúnmente cuando se buscan las raíces, a partir de un punto de partida $g(x_0, y_0, z_0)$, haciendo g(x,y,z)=0, se encuentran nuevos valores de x_0, y_0, z_0. Se le conoce al algoritmo como el método de Newton Raphson multivariable (Constantinides, 1987).

Considérese la función no lineal

$$f(x) = Ae^{Bx} + Ce^{Dx}; \qquad g(x) = Ae^{Bx} + Ce^{Dx} - f(x) = 0$$

Si A,B,C y D son las incógnitas para 4 valores conocidos de x y f(x) entonces

$$g(A,B,C,D)_{x=x_0} = Ae^{Bx_0} + Ce^{Dx_0} - f(x_0)$$

$$dg = \frac{\partial g}{\partial A}dA + \frac{\partial g}{\partial B}dB + \frac{\partial g}{\partial C}dC + \frac{\partial g}{\partial D}dD$$

De manera discreta y vectorial

$$\Delta \boldsymbol{G}(A,B,C,D) = \boldsymbol{G}(A,B,C,D) - \boldsymbol{G}(A_0,B_0,C_0,D_0) = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial A} & \frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial B} & \frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial C} & \frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial D} \end{bmatrix}}_{J=Jacobiano} \begin{bmatrix} \Delta A \\ \Delta B \\ \Delta C \\ \Delta D \end{bmatrix}$$

Con objeto de ilustrar los cálculos en el método de Newton Raphson multivariable se usan los siguientes datos

$$\begin{aligned} f(0.5) = 1: &\quad 1 = Ae^{.5B} + Ce^{.5D}; \\ f(2) = 2: &\quad 2 = Ae^{2B} + Ce^{2D} \\ f(3) = 3: &\quad 3 = Ae^{3B} + Ce^{3D} \\ f(4) = 4: &\quad 4 = Ae^{4B} + Ce^{4D} \end{aligned} \qquad \boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} Ae^{.5B} + Ce^{.5D} - 1 \\ Ae^{2B} + Ce^{2D} - 2 \\ Ae^{3B} + Ce^{3D} - 3 \\ Ae^{4B} + Ce^{4D} - 4 \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} e^{B_0x_0} & A_0x_0e^{B_0x_0} & e^{D_0x_0} & C_0x_0e^{D_0x_0} \\ e^{B_0x_1} & A_0x_1e^{B_0x_1} & e^{D_0x_1} & C_0x_1e^{D_0x_1} \\ e^{B_0x_2} & A_0x_2e^{B_0x_2} & e^{D_0x_2} & C_0x_2e^{D_0x_2} \\ e^{B_0x_3} & A_0x_3e^{B_0x_3} & e^{D_0x_3} & C_0x_3e^{D_0x_3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{B_0(0.5)} & A_0(0.5)e^{B_0(0.5)} & e^{D_0(0.5)} & C_0(0.5)e^{D_0(0.5)} \\ e^{B_0(2)} & A_0(2)e^{B_0(2)} & e^{D_0(2)} & C_0(2)e^{D_0(2)} \\ e^{B_0(3)} & A_0(3)e^{B_0(3)} & e^{D_0(3)} & C_0(3)e^{D_0(3)} \\ e^{B_0(4)} & A_0(4)e^{B_0(4)} & e^{D_0(4)} & C_0(4)e^{D_0(4)} \end{bmatrix}$$

Con un punto de partida supuestos de $A_0 = 1; B_0 = 0.5; C_0 = 1; D_0 = 0.8;$

$$J = \begin{bmatrix} 1.28402542 & 0.6420127160.25 & 1.4918247 & 0.74591235 \\ 2.71828183 & 5.43656366 & 4.95303242 & 9.90606485742 \\ 4.48168907 & 13.4450672 & 11.0231764 & 33.0695291 \\ 7.3890561 & 29.5562244 & 24.53253028103 & 98.130120872927 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A - A_0 \\ B - B_0 \\ C - C_0 \\ D - D_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - 1 \\ B - 0.5 \\ C - 1 \\ D - 0.8 \end{bmatrix} = J^{-1} \cdot \left(\boldsymbol{G}(A, B, C, D) - \boldsymbol{G}(A_0, B_0, C_{0,} D_0) \right) =$$

El objetivo es que A,B,C,D logren que ***G***(A,B,C,D) sea cero, entonces;

$$J^{-1} \cdot \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \boldsymbol{G}(A_0, B_0, C_{0,} D_0) \right) = \begin{bmatrix} -0.33261037 \\ 0.0749679 \\ -0.45389014 \\ 0.0751755 \end{bmatrix}$$

Se calculan los nuevos valores

$$A_0 = 1 - 0.3326 = 0.667389626;$$
$$B_0 = 0.5 + 0.0749679 = 0.57496792;$$
$$C_0 = 1 - 0.45389014 = 0.546109859;$$
$$D_0 = 0.8 + 0.0751755 = 0.875175508;$$

$$J = \begin{bmatrix} 1.3330692 & 0.44483828 & 1.54896622 & 0.42295286 \\ 3.1579902 & 4.21521991 & 5.75662298 & 6.28749713 \\ 5.6119809 & 11.2361335 & 13.8118445 & 22.6283534 \\ 9.9729026 & 26.623247 & 33.1387082 & 72.389501 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A - A_0 \\ B - B_0 \\ C - C_0 \\ D - D_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - 0.667389626 \\ B - 0.57496792 \\ C - 0.546109859 \\ D - 0.875175508 \end{bmatrix} = J^{-1} \cdot \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \boldsymbol{G}(A_0, B_0, C_{0,} D_0) \right) = \begin{bmatrix} -0.5150858 \\ 0.16101206 \\ -0.2704668 \\ 0.0803039 \end{bmatrix}$$

Los valores de subsecuentes iteraciones se muestran en la tabla 1 donde puede observarse que los ajustes en cada iteración impactan únicamente en g1 y g2, en la primera iteración hay convergencia (La función g se aproxima a cero), pero diverge para los cálculos posteriores. El tipo de función propuesto tiene dos bases con estructura similar $\gamma e^{\delta x}$. Cualquier variación por minúscula que sea en el exponente B ó D, provoca cambios grandes en la función. En el caso supuesto de que B fuera igual a D, el Jacobiano se indetermina porque las dos bases serían semejantes $e^{Bx} = e^{Dx}$. Entonces la estructura de modelo propuesta en sí, tiene característica inestable para iteraciones con el método de Newton y los valores de partida serán muy importantes. Puede notarse en la tabla 1 que el exponente B se incrementa del valor de partida en 0.5 hacia 0.57, en la iteración convergente. Mientras que en esa misma iteración D se incrementa desde 0.8 hasta 0.87. Se podría pensar que los valores de B y D tomarían el valor de 0.6 y 0.9 antes de influir divergentemente sobre el proceso iterativo.

Tabla 1: Resultados de iteración usando el método de Newton Raphson multivariable.

Iteración	0	1	2	3	5
$g1(A,B,C,D)$ $g2(A,B,C,D)$ $g3(A,B,C,D)$ $g4(A,B,C,D)$	1.77585011 3.25135852 -3 -4	0.73558229 0.52693188 -3 -4	-0.3354934 3235.70477 -3 -4	4.99828694 3235.49021 -3 -4	4.08403091 3234.63369 -3 -4
A	1	0.66738963	0.15230378	1.41310765	1.41231853
B	0.5	0.57496792	0.73597998	3.87424808	3.87437989
C	1	0.54610986	0.27564302	-1.7681427	-2.3683792
D	0.8	0.87517551	0.9554794	1.53379061	1.37766455

Por otra parte, puede mostrarse que si se consideran las ecuaciones de g como parte constitutiva del determinante de un covector dependiente dos covectores conocidos, nos lleva a expresar una ecuación que relaciona la función únicamente con x, B y D.

$$g_d = Ae^{xB} + Ce^{xD} - f = 0$$

Si se asignan los valores de B=0.6 y D=0.9

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} Ae^{xB} + Ce^{xD} - f \\ Ae^{3B} + Ce^{3D} - 3 \\ Ae^{4B} + Ce^{4D} - 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{xB} & e^{xD} & -f \\ e^{3(.6)} & e^{3(0.9)} & -3 \\ e^{4(0.6)} & e^{4(0.9)} & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ C \\ 1 \end{bmatrix}$$

Haciendo el determinante de la matriz =0, implica dependencia de uno de los covectores.

$$\begin{vmatrix} e^{xB} & e^{xD} & -f \\ e^{3(.6)} & e^{3(0.9)} & -3 \\ e^{4(0.6)} & e^{4(0.9)} & -4 \end{vmatrix} = e^{xB}(-4e^{2.7} + 3e^{3.6}) + e^{xD}(-3e^{2.4} + 4e^{1.8}) - f(e^{1.8+3.6} - e^{2.4+2.7})$$

$$= 50.25e^{xB} - 8.87e^{xD} - 57.38f$$

$$= 50.25e^{xB} - 8.87e^{xD} - 57.38(Ae^{xB} + Ce^{xD}) = 0$$

$$A = \frac{50.25}{57.38} = 0.876; C = -\frac{8.87}{57.38} = -0.1545$$

La ecuación únicamente satisface los valores de x=3, x=4; para B=0.6; D=0.9; A=-0.876; C=-0.1545;

$$f(x) = 0.876e^{0.6x} - 0.1545e^{0.9x}$$

$$f(3) = 3: 0.876e^{3(0.6)} - 0.1545e^{3(0.9)} = 3.00057$$

$$f(4) = 4: 0.876e^{4(0.6)} - 0.1545e^{4(0.9)} = 4.0018$$

Se construyó una función a partir del criterio de dependencia, válida únicamente para los puntos experimentales de quien depende.

Nuevamente considerando que en el método de Newton la ecuación que nos lleva al cálculo de un nuevo valor de A,B,C y D, está expresado por las siguientes ecuaciones.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial G}{\partial A} & \frac{\partial G}{\partial B} & \frac{\partial G}{\partial C} & \frac{\partial G}{\partial D} \\ \frac{\partial G_1}{\partial A} & \frac{\partial G_1}{\partial B} & \frac{\partial G_1}{\partial C} & \frac{\partial G_1}{\partial D} \\ \frac{\partial G_2}{\partial A} & \frac{\partial G_2}{\partial B} & \frac{\partial G_2}{\partial C} & \frac{\partial G_2}{\partial D} \\ \frac{\partial G_3}{\partial A} & \frac{\partial G_3}{\partial B} & \frac{\partial G_3}{\partial C} & \frac{\partial G_3}{\partial D} \end{bmatrix}}_{J} \begin{bmatrix} A-A_0 \\ B-B_0 \\ C-C_0 \\ D-D_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G(A,B,C,D) \\ G_1(A,B,C,D) \\ G_1(A,B,C,D) \\ G_3(A,B,C,D) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} G(A_0,B_0,C_0,D_0) \\ G_1(A_0,B_0,C_0,D_0) \\ G_2(A_0,B_0,C_0,D_0) \\ G_3(A_0,B_0,C_0,D_0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} e^{B_0x_0} & A_0x_0e^{B_0x_0} & e^{D_0x_0} & C_0x_0e^{D_0x_0} \\ e^{B_0x_1} & A_0x_1e^{B_0x_1} & e^{D_0x_1} & C_0x_1e^{D_0x_1} \\ e^{B_0x_2} & A_0x_2e^{B_0x_2} & e^{D_0x_2} & C_0x_2e^{D_0x_2} \\ e^{B_0x_3} & A_0x_3e^{B_0x_3} & e^{D_0x_3} & C_0x_3e^{D_0x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A-A_0 \\ B-B_0 \\ C-C_0 \\ D-D_0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} G_1(A_0,B_0,C_0,D_0) \\ G_2(A_0,B_0,C_0,D_0) \\ G_3(A_0,B_0,C_0,D_0) \\ G_4(A_0,B_0,C_0,D_0) \end{bmatrix}$$

Sería equivalente a evaluar

$$\begin{bmatrix} e^{B_0x}(A-A_0) + A_0x_0e^{B_0x}(B-B_0) + e^{D_0x}(C-C_0) + C_0xe^{D_0x}(D-D_0) \\ e^{B_0x_1}(A-A_0) + A_0x_1e^{B_0x_1}(B-B_0) + e^{D_0x_1}(C-C_0) + C_0x_1e^{D_0x_1}(D-D_0) \\ e^{B_0x_2}(A-A_0) + A_0x_2e^{B_0x_2}(B-B_0) + e^{D_0x_2}(C-C_0) + C_0x_2e^{D_0x_2}(D-D_0) \\ e^{B_0x_3}(A-A_0) + A_0x_3e^{B_0x_3}(B-B_0) + e^{D_0x_3}(C-C_0) + C_0x_3e^{D_0x_3}(D-D_0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} Ae^{xB} + Ce^{xD} - A_0e^{xB_0} + C_0e^{xD_0} \\ Ae^{x_1B} + Ce^{x_1D} - A_0e^{x_1B_0} + C_0e^{x_1D_0} \\ Ae^{x_2B} + Ce^{x_2D} - A_0e^{x_2B_0} + C_0e^{x_2D_0} \\ Ae^{x_3B} + Ce^{x_3D} - A_0e^{x_3B_0} + C_0e^{x_3D_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_0e^{xB_0} + C_0e^{xD_0} + f \\ -A_0e^{x_1B_0} + C_0e^{x_1D_0} + 2 \\ -A_0e^{x_2B_0} + C_0e^{x_2D_0} + 3 \\ -A_0e^{x_3B_0} + C_0e^{x_3D_0} + 4 \end{bmatrix}$$

Que puede condensarse en la ecuación.

$$\begin{bmatrix} e^{B_0x}A + A_0x_0e^{B_0x}(B-B_0) + e^{D_0x}C + C_0xe^{D_0x}(D-D_0) - f \\ e^{B_0x_1}A + A_0x_1e^{B_0x_1}(B-B_0) + e^{D_0x_1}C + C_0x_1e^{D_0x_1}(D-D_0) - 2 \\ e^{B_0x_2}A + A_0x_2e^{B_0x_2}(B-B_0) + e^{D_0x_2}C + C_0x_2e^{D_0x_2}(D-D_0) - 3 \\ e^{B_0x_3}A + A_0x_3e^{B_0x_3}(B-B_0) + e^{D_0x_3}C + C_0x_3e^{D_0x_3}(D-D_0) - 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Añadiendo como cuarto valor experimental f(0.5)=1, con objeto añadir un nuevo renglón y así lograr tener una matriz cuadrada. Puede observarse que el primer covector depende de los 4 inferiores.

$$\begin{bmatrix} e^{B_0x} & A_0x_0e^{B_0x} & e^{D_0x} & C_0xe^{D_0x} & -f \\ e^{B_0x_1} & A_0x_1e^{B_0x_1} & e^{D_0x_1} & C_0x_1e^{D_0x_1} & -2 \\ e^{B_0x_2} & A_0x_2e^{B_0x_2} & e^{D_0x_2} & C_0x_2e^{D_0x_2} & -3 \\ e^{B_0x_3} & A_0x_3e^{B_0x_3} & e^{D_0x_3} & C_0x_3e^{D_0x_3} & -4 \\ e^{B_0x_0} & A_0x_0e^{B_0x_0} & e^{D_0x_0} & C_0x_0e^{D_0x_0} & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B-B_0 \\ C \\ D-D_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tomando los valores aproximados B_0=0.6 y D_0=0.9 de la primera iteración, con el determinante de la matriz cuadrada igual a cero, el primer renglón es dependiente de los restantes y con ello es posible calcular una ecuación que satisfaga $f(x_0) = 1, f(x_1) = 2, f(x_2) = 3\ y\ f(x_3) = 4$.

$$\begin{vmatrix} e^{B_0x} & A_0xe^{B_0x} & e^{D_0x} & C_0xe^{D_0x} & -f \\ e^{B_0x_1} & A_0x_1e^{B_0x_1} & e^{D_0x_1} & C_0x_1e^{D_0x_1} & -2 \\ e^{B_0x_2} & A_0x_2e^{B_0x_2} & e^{D_0x_2} & C_0x_2e^{D_0x_2} & -3 \\ e^{B_0x_3} & A_0x_3e^{B_0x_3} & e^{D_0x_3} & C_0x_3e^{D_0x_3} & -4 \\ e^{B_0x_0} & A_0x_0e^{B_0x_0} & e^{D_0x_0} & C_0x_0e^{D_0x_0} & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$= e^{B_0x} \begin{vmatrix} A_0x_1e^{B_0x_1} & e^{D_0x_1} & C_0x_1e^{D_0x_1} & -2 \\ A_0x_2e^{B_0x_2} & e^{D_0x_2} & C_0x_2e^{D_0x_2} & -3 \\ A_0x_3e^{B_0x_3} & e^{D_0x_3} & C_0x_3e^{D_0x_3} & -4 \\ A_0x_0e^{B_0x_0} & e^{D_0x_0} & C_0x_0e^{D_0x_0} & -1 \end{vmatrix}$$

$$- A_0xe^{B_0x} \begin{vmatrix} e^{B_0x_1} & e^{D_0x_1} & C_0x_1e^{D_0x_1} & -2 \\ e^{B_0x_2} & e^{D_0x_2} & C_0x_2e^{D_0x_2} & -3 \\ e^{B_0x_3} & e^{D_0x_3} & C_0x_3e^{D_0x_3} & -4 \\ e^{B_0x_3} & e^{D_0x_3} & C_0x_3e^{D_0x_3} & -1 \end{vmatrix}$$

$$+ e^{D_0x} \begin{vmatrix} e^{B_0x_1} & A_0x_1e^{B_0x_1} & C_0x_1e^{D_0x_1} & -2 \\ e^{B_0x_2} & A_0x_2e^{B_0x_2} & C_0x_2e^{D_0x_2} & -3 \\ e^{B_0x_3} & A_0x_3e^{B_0x_3} & C_0x_3e^{D_0x_3} & -4 \\ e^{B_0x_0} & A_0x_0e^{B_0x_0} & C_0x_0e^{D_0x_0} & -1 \end{vmatrix}$$

$$- C_0xe^{D_0x} \begin{vmatrix} e^{B_0x_1} & A_0x_1e^{B_0x_1} & e^{D_0x_1} & -2 \\ e^{B_0x_2} & A_0x_2e^{B_0x_2} & e^{D_0x_2} & -3 \\ e^{B_0x_3} & A_0x_3e^{B_0x_3} & e^{D_0x_3} & -4 \\ e^{B_0x_0} & A_0x_0e^{B_0x_0} & e^{D_0x_0} & -1 \end{vmatrix}$$

$$- f \begin{bmatrix} e^{B_0x_1} & A_0x_1e^{B_0x_1} & e^{D_0x_1} & C_0x_1e^{D_0x_1} \\ e^{B_0x_2} & A_0x_2e^{B_0x_2} & e^{D_0x_2} & C_0x_2e^{D_0x_2} \\ e^{B_0x_3} & A_0x_3e^{B_0x_3} & e^{D_0x_3} & C_0x_3e^{D_0x_3} \\ e^{B_0x_0} & A_0x_0e^{B_0x_0} & e^{D_0x_0} & C_0x_0e^{D_0x_0} \end{bmatrix} = 0$$

$$= -4.167473354 * e^{0.6x} + 1.63204008 * (0.67)xe^{0.6x} - 2.332532239 * e^{0.9x} + 0.620742916(0.55)xe^{0.9x} = -8.277908777f$$

$$f = 0.50344519e^{0.6x} - 0.132094576xe^{0.6x} + 0.281777959e^{0.9x} - 0.07498789xe^{0.9x}$$

Puede mostrarse que para los 4 puntos fuente, se satisface la función.

$$x = .5: f(.5) = 1 = 0.50344519e^{0.6(.5)} - 0.13209(.5)e^{0.6(.5)} + 0.281777e^{0.9(.5)} - 0.0749(.5)e^{0.9(.5)}$$
$$x = 2: f(2) = 2 = 0.50344519e^{0.6(2)} - 0.13209(2)e^{0.6(2)} + 0.281777e^{0.9(2)} - 0.0749(2)e^{0.9(2)}$$
$$x = 3: f(3) = 3 = 0.50344519e^{0.6(3)} - 0.13209(3)e^{0.6(3)} + 0.281777e^{0.9(3)} - 0.0749(3)e^{0.9(3)}$$
$$x = 4: f(4) = 4 = 0.50344519e^{0.6(4)} - 0.13209(4)e^{0.6(4)} + 0.281777e^{0.9(4)} - 0.0749(4)e^{0.9(4)}$$

Caso de estudio 3

Una ecuación diferencial matricial

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dt} - A\boldsymbol{y} = B\boldsymbol{z}$$

Con condiciones iniciales cero, puede ser expresada algebraicamente (Laplace)

$$[\lambda I - A]\boldsymbol{y} = B\boldsymbol{z}$$

Por ejemplo las ecuaciones diferenciales

$$\frac{dy_1}{dt} = 3y_2 - y_1 + 2;\ \frac{dy_2}{dt} = 4y_1 - 2y_2 + 4$$

$$\begin{bmatrix} \lambda + 1 & -3 \\ -4 & \lambda + 2 \end{bmatrix} \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \boldsymbol{z}$$

Puede probarse que este par de ecuaciones se pueden representar por una ecuación diferencial de segundo orden.

$$y_2 = \frac{1}{3}\left(\frac{dy_1}{dt} + y_1 + 2\right);\frac{dy_2}{dt} = \frac{1}{3}\frac{d^2y_1}{dt^2} + \frac{y_1}{3} = 4y_1 - 2y_2 + 4 = 4y_1 - \frac{2}{3}\left(\frac{dy_1}{dt} + y_1 + 2\right) + 4$$

$$\frac{1}{3}\frac{d^2y_1}{dt^2} + \frac{2}{3}\frac{dy_1}{dt} + y_1\left(\frac{1}{3} - 4 + \frac{2}{3}\right) = 4 - \frac{4}{3}$$

$$\frac{1}{3}\lambda^2 + \frac{2}{3}\lambda - 3 = 0;\ \lambda_1 = \frac{-\frac{2}{3} + \sqrt{\frac{4}{9} + 4}}{\frac{2}{3}} \lambda_2 = \frac{-\frac{2}{3} - \sqrt{\frac{4}{9} + 4}}{\frac{2}{3}};\ y_{p1} = -\frac{8}{9}$$

$$y_1 = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} - 8/9$$

$$y_2 = \frac{1}{3}\left(\frac{dy_1}{dt} + y_1 + 2\right) = y_2 = \frac{1}{3}\left(c_1\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\lambda_2 e^{\lambda_2 t} + c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} - 8/9 + 2\right)$$

Note que $\lambda_1\ y\ \lambda_2$ son los eigenvalores de la ecuación diferencial en forma matricial y algebraica.

t	y_1	y_2	x_1	x_2
2.7	3.12931616	3.04849625	0	2
3.4	8.05241992	6.33110613	0.9	1.3
4.1	132.153353	89.0651976	1.8	0.6

Tabla 2: Datos correspondientes a un sistema dinámico con dos entradas x1, x2 y 2 salidas y1, y2.

Referido a los datos en la tabla 2

El tipo de función solución de la ecuación diferencial sería

$$y_1 = Ae^{Bt} + Ce^{Dt} + Et + F$$
$$y_2 = A_1e^{Bt} + C_1e^{Dt} + E_1t + F_1$$

La estructura de la ecuación diferencial homogénea puede calcularse por los exponentes

$$(\lambda - B)(\lambda - D) = \lambda^2 - (B + D)\lambda + BD = 0 \rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} - (B + D)\frac{dy}{dx} + By = 0$$

En forma matricial

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Aunque podría ser la ecuación con una matriz semejante (Los mismos eigenvalores).

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Con los valores de x1, x2, se tiene una recta como $x_1 = 1.2857t - 3.4714;\ x_2 = -t + 4.7$

Al ser una ecuación no líneal el planteamiento se hace de manera semejante al caso de estudio 2.

Conclusiones

La restricción del ajuste a funciones por el concepto de dependencia es a aquellas funciones que puedan representarse en forma matricial cuadrada, ya sea uno de los covectores o vectores deberá de depender de los restantes covectores o vectores respectivamente. La linearización de funciones no lineales en ocasiones puede ser útil para expresar adecuadamente en forma matricial y encontrar parámetros desconocidos. En el presente escrito se mostró que el método iterativo no fue tan eficiente como simplemente manejar un covector dependiente de covectores conocidos.

Bibliografía

Constantinides. (1987). *Applied Numerical Methods with personal computers.* New York: Mc Graw Hill.

Poole, D. (2005). *Linear Algebra. A Modern Introduction.* Cengage Learning .

Rose, H. E. (2002). *Linear Algebra. A Pure Mathematical Approach.* Springer .