

OPTIMIZACIÓN: FUNDAMENTOS BÁSICOS Y APLICACIÓN EN LA VIDA COTIDIANA

Rosa María Fonseca-Pérez *, Octavio del-Mazo-Alvarado,
Adrián Bonilla-Petriciolet

Tecnológico Nacional de México, Instituto Tecnológico de Aguascalientes. Av. Adolfo López Mateos
#1801 Ote., Fracc. Bona Gens, C.P. 20255, Aguascalientes, Ags., México. rm.fonseca0@gmail.com

Resumen

En este trabajo de divulgación se abordan los aspectos básicos de la optimización matemática y sus implicaciones en la vida cotidiana de la sociedad. Se presenta la descripción de los elementos fundamentales de un problema de optimización (función objetivo, variables de optimización y restricciones) y la formulación habitual del problema es ilustrada incluyendo situaciones cotidianas que comprenden escenarios de minimización y maximización para facilitar la comprensión de este campo disciplinario. Se describe un enfoque de cuatro etapas para abordar problemas de optimización, incluyendo un ejemplo numérico sencillo planteado paso a paso.

Palabras clave: optimización; minimización; maximización; función objetivo

OPTIMIZATION: BASIC PRINCIPLES AND APPLICATION IN EVERYDAY LIFE

Abstract

This manuscript focuses on the fundamentals of mathematical optimization and its implications for daily life in society. The main elements of an optimization problem (objective function, optimization variables, and constraints) are described and the standard problem formulation is illustrated using everyday situations that include minimization and maximization scenarios with the aim of facilitating the understanding of this disciplinary field. A four-stage approach for addressing optimization problems is described, including a simple numerical example presented step by step.

Keywords: optimization; minimization; maximization; objective function

1. Introducción: descubriendo el campo de la optimización

¿Qué es lo primero que viene a la mente al escuchar el término optimización? Tal vez palabras como mejorar o simplificar, o quizás acciones como usar fórmulas, números y calculadoras.

En el ámbito industrial, esta área de las matemáticas se aplica en múltiples escenarios, donde el objetivo final usualmente es obtener mejores resultados. Por ejemplo, reduciendo costos mediante mejoras en la eficiencia de los procesos o en el diseño de los productos. La optimización no solamente se utiliza a nivel industrial, también se aplica a problemas cotidianos que la sociedad enfrenta todos los días.

Estas situaciones de la vida diaria pueden ser abordadas como problemas de optimización. Sin embargo, usualmente no se visualizan de ese modo, sino como sencillas tomas de decisiones. Un ejemplo muy claro surge cuando se quiere llegar a un destino en la ciudad: ¿qué vialidad tomar?, ¿cuál es la ruta para llegar más rápido? o, dicho de otra forma, ¿qué camino permite minimizar el tiempo de traslado o el consumo de gasolina? A este problema se enfrentan todos los días los repartidores de paquetería, determinar la

ruta más corta que permita repartir todos los paquetes de la jornada. Otro ejemplo muy usual es la organización de múltiples actividades en un día, donde se busca completar la mayor cantidad de ellas, priorizando las más importantes.

La optimización tiene como finalidad encontrar la mejor solución de un problema entre un grupo de posibles alternativas. Al resolver un problema, se está hablando implícitamente de lograr un objetivo en particular. Usualmente, los objetivos de los problemas de optimización consisten en encontrar el menor o el mayor valor para algún criterio en específico. Por ejemplo, minimizar costos, o bien maximizar beneficios.

En este artículo de divulgación se abordan conceptos básicos del área de optimización, comenzando por su definición, elementos principales, tipos de problemas y notación general, para pasar a una sección donde se describe el paso a paso para abordar un problema de optimización general. Se presenta un ejemplo resuelto para ilustrar cómo la optimización permite realizar toma de decisiones de una manera efectiva y sencilla.

2. ¿Qué es optimización?

En términos simples, optimizar consiste en encontrar la mejor opción entre un conjunto factible de alternativas para cumplir el objetivo de un determinado problema. El concepto “optimizar” implica minimizar o maximizar un objetivo particular, haciéndolo lo más pequeño o lo más grande posible, respectivamente. Por ejemplo, si se abriera una tienda de artículos escolares y se buscara obtener la mayor cantidad de dinero posible, el objetivo sería maximizar el beneficio económico. Si se quisiera construir una casa residencial con la menor inversión, se buscaría minimizar los costos totales cotizando diferentes materiales de construcción, así como costos de mano de obra, ver Figura 1.



a)



b)

Figura 1. Problemas clásicos de optimización:

- a) maximizar ganancias en tienda de artículos escolares y b) minimizar costos en la construcción de un hogar.

De forma general, un problema de optimización se compone de tres elementos principales: la función objetivo, las variables de optimización (también llamadas variables de decisión o de diseño) y las restricciones.

La función objetivo representa aquello que se quiere optimizar (minimizar o maximizar, dependiendo el tipo de problema), y usualmente es representada por una ecuación matemática. Este elemento del problema de optimización refleja el efecto que tienen las variables de optimización en el objetivo y es fundamental en el planteamiento del problema. Por ejemplo, para el caso hipotético de la gestión de una tienda de artículos escolares, el objetivo es maximizar las ganancias del establecimiento. Este criterio se puede definir como la función objetivo del problema y calcularse de la siguiente manera

$$\text{Función objetivo} = F(x) \quad (1)$$

$$F(x) = \text{ganancias} = \text{ventas} - \text{costos} \quad (2)$$

donde las ventas se calculan en función de la cantidad y precio de los artículos vendidos, y los costos se podrían determinar considerando, por ejemplo, los gastos relacionados con el uso del espacio comercial, salarios y costos de adquisición de los artículos en venta.

En el caso de la construcción de una casa residencial, el objetivo usual es reducir el costo total de la obra. Esta meta se puede expresar a través de la siguiente función objetivo

$$\begin{aligned} F(x) &= \text{costo de la obra} \\ &= \text{costo de materiales} \\ &+ \text{costo de mano de obra} \end{aligned} \quad (3)$$

La función objetivo de un problema de optimización puede definirse de múltiples maneras, desde expresiones sencillas hasta funciones complejas con diversos términos y relaciones entre las variables de optimización, dependiendo del tipo de problema de optimización y el nivel de detalle requerido.

En general, se busca que la función objetivo sea sencilla desde el punto de vista matemático y que además refleje claramente el objetivo deseado. No siempre es posible utilizar una función objetivo sencilla, ya que estas ecuaciones pueden ser tanto expresiones explícitas como también implícitas. Una función objetivo explícita es aquella donde el objetivo deseado se puede expresar de manera directa en términos de las variables de optimización. En ocasiones, la naturaleza del

problema impide manejar ecuaciones explícitas, resultando en funciones objetivo implícitas, donde la relación entre el objetivo y las variables de optimización está dada por ecuaciones en las que no es posible expresar el objetivo de manera directa. La mayoría de los problemas de ingeniería involucran funciones implícitas (Martins & Ning, 2021), por lo que este tipo de características son aspectos importantes a tener en cuenta para lograr encontrar los valores de las variables de optimización que minimizan o maximizan la función objetivo.

Las variables de optimización son aquellas cantidades que se pueden manipular con la finalidad de minimizar o maximizar la función objetivo. De forma general, estas variables se pueden clasificar como continuas o discretas. El primer grupo representa números reales que pueden variar de manera continua dentro un rango específico (Martins & Ning, 2021). Por otro lado, las variables discretas son aquellas que solamente pueden tomar ciertos valores dentro de un conjunto finito de opciones (Nocedal & Wright, 2006). El tipo de variables involucradas en el problema de optimización tiene un efecto relevante al momento de seleccionar el algoritmo de resolución, ya que existen estrategias diseñadas para resolver problemas

que contienen variables continuas, así como técnicas específicas para abordar escenarios con variables discretas.

Retomando el ejemplo de la tienda de artículos escolares, un conjunto de variables de optimización adecuadas para calcular las ventas y los costos puede ser: el precio de los artículos, la cantidad de piezas vendidas, el número de colaboradores que trabajan en el establecimiento, así como el salario de cada uno de ellos. En el escenario de la edificación de la casa residencial, la cantidad y precio de los materiales (por ejemplo, bloques, cemento, acero, acabados, etc.), así como el salario de los trabajadores de la obra pueden ser variables de optimización, ya que permiten calcular y minimizar el valor de la función objetivo. La elección adecuada de las variables de optimización de un problema de optimización es fundamental para identificar escenarios factibles y satisfactorios, ver Figura 2.

El último elemento de un problema de optimización es el conjunto de restricciones, el cual incluye una serie de condiciones asociadas al problema que deben satisfacerse. Estas restricciones pueden ser requisitos impuestos por el diseñador del problema, o

límites naturales que dan factibilidad a las soluciones.



Figura 2. Ejemplos de variables de optimización para maximizar ganancias y minimizar costos.

Por ejemplo, para el caso de la tienda de artículos escolares, la cantidad de dinero disponible para el pago de nómina podría ser de \$15,000 pesos mensuales, lo que implica que los gastos asociados al personal del establecimiento (el producto de la cantidad de empleados por su correspondiente salario) no pueden superar tal cantidad. Otra posible limitante a considerar en la operación de la tienda puede ser el espacio físico del establecimiento. Es posible que éste sea reducido, limitando la cantidad de empleados por turno. Generalmente, se utilizan

ecuaciones de igualdad y desigualdad para denotar las restricciones del problema, por ejemplo

$$0 \leq \text{gastos de nómina} \leq 15,000 \quad (4)$$

$$0 \leq \text{número de empleados} \leq 3 \quad (5)$$

Dentro de la clasificación de los problemas de optimización, se pueden identificar dos tipos: con restricciones y sin restricciones. La primera categoría considera aquellos problemas de optimización que involucran un conjunto de restricciones de igualdad y/o desigualdad que deben cumplirse para que la solución del problema sea factible. En estos casos, se habla de un problema de optimización con restricciones. Por otro lado, cuando el problema de optimización no involucra ningún tipo de restricción, se habla de un problema de optimización sin restricciones (Antoniou & Lu, 2021). En este artículo, se abordará el problema de optimización con restricciones, ya que se presenta de manera muy frecuente en escenarios de aplicación.

Ahora que se han revisado los conceptos fundamentales, es momento de formular el problema de optimización utilizando la notación matemática habitual (Deb, 2012), que para un problema de minimización con restricciones se puede representar como

$$\min F(\mathbf{x}) \quad (6)$$

sujeto a

$$g_j(\mathbf{x}) \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, J; \quad (7)$$

$$h_k(\mathbf{x}) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, K; \quad (8)$$

$$x_i^{INF} \leq x_i \leq x_i^{SUP}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (9)$$

donde F es la función objetivo, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ es el vector de N variables de optimización, $g_j(\mathbf{x})$ es una de las J restricciones de desigualdad, $h_k(\mathbf{x})$ es una de las K restricciones de igualdad, x_i es una de las N variables de optimización y x_i^{INF}, x_i^{SUP} representan el límite inferior y superior de cada una de estas, respectivamente. Asociando esta estructura con los elementos del problema de optimización es posible identificar la función objetivo por la ecuación (6), las restricciones del problema por las ecuaciones (7) y (8) y las variables de optimización, así como los valores límite que pueden tomar en la ecuación (9). En conjunto, las ecuaciones (6)-(9) conforman la definición matemática general de un problema de minimización con restricciones.

Una vez establecido el problema de optimización, la siguiente etapa consiste en resolverlo.

3. ¿Cómo resolver un problema de optimización?

Inicialmente, resolver un problema de optimización puede parecer una tarea difícil. Sin embargo, este proceso puede simplificarse siguiendo una serie de etapas. En la Figura 3 se presenta una secuencia de cuatro pasos fundamentales para resolver un problema de optimización.



Figura 3. Pasos a seguir para resolver un problema de optimización.

3.1 Definir el problema de optimización

El primer paso para resolver un problema de optimización consiste en identificar aquello que se quiere maximizar o minimizar. En secciones anteriores se presentaron dos ejemplos sencillos, en donde en uno de ellos se buscaba maximizar las ganancias de una tienda de artículos escolares, mientras que en el otro escenario se planteaba minimizar los costos asociados a la construcción de una vivienda familiar. Además de establecer la finalidad del problema, es necesario definir las variables que tienen efecto en el objetivo,

es decir, las variables de optimización. Los valores de estas variables irán cambiando durante el proceso de optimización. En caso de que alguna de las variables de optimización tenga un valor numérico mínimo y/o máximo, es necesario especificarlo mediante el límite inferior y superior correspondiente (x_i^{INF} y x_i^{SUP} , respectivamente). Conociendo las variables de optimización del problema, ahora es posible formular la función objetivo. Es importante que esta expresión refleje claramente el objetivo del problema (minimizar o maximizar) y se encuentre en términos de las variables de optimización. Finalmente, si el problema a resolver tiene alguna limitante, es necesario definir las restricciones correspondientes como igualdades y/o desigualdades matemáticas.

3.2 Seleccionar el método de resolución

Dentro del mundo de la optimización es común enfrentarse con una diversidad de problemas, por ejemplo, problemas lineales, no lineales, discretos, mixtos o con múltiples objetivos. Existen diversas estrategias de resolución para abordar estos problemas. Algunas de ellas están enfocadas a un tipo particular de problema y otras orientadas

hacia una aplicación más general. Estas estrategias usualmente se denominan métodos o algoritmos de resolución y tienen una función fundamental dentro del proceso de optimización. Hoy en día es posible encontrar una amplia gama de algoritmos. Algunos de ellos muy sencillos y efectivos, pero limitados a resolver problemas muy específicos. Por otro lado, existen métodos numéricos más elaborados que buscan resolver una mayor cantidad de tipos de problemas de optimización. La correcta elección del método de resolución es una etapa crucial para obtener una solución adecuada, ver Figura 4.

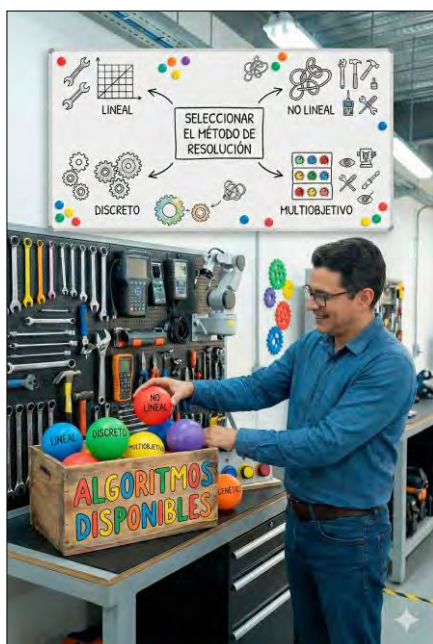


Figura 4. Ilustración sobre la elección del algoritmo de optimización de acuerdo con el tipo de problema a resolver.

A continuación, se proporciona una serie de consejos para orientar al lector sobre la elección adecuada del algoritmo de optimización:

- Identificar si el problema de optimización es con o sin restricciones, ya que esta característica determina directamente el tipo de algoritmo que se puede aplicar.
- Especificar si la función objetivo y las restricciones son lineales, pues se dispone de técnicas numéricas muy efectivas y eficientes para resolver problemas lineales, por ejemplo, el algoritmo Simplex.
- Analizar cada una de las variables de optimización y determinar su tipo (continua o discreta), dado que existen métodos de resolución específicos por tipo de variable.

3.3 Implementar el método de resolución

Una vez seleccionado el método de resolución, la siguiente etapa consiste en implementarlo. Para poder aplicar de manera eficiente una estrategia de resolución, es necesario utilizar una computadora donde se formulará el problema de optimización, así

como el algoritmo para resolverlo. Hoy en día existe una gran cantidad de métodos de resolución disponibles en lenguajes de programación como Fortran, Python, C++, o en software especializado como MATLAB, GAMS, entre otros. Estas herramientas ofrecen interfaces de trabajo amigables para el usuario, así como potentes funcionalidades computacionales. Un punto clave durante la implementación computacional es validar el problema de optimización. Es importante revisar que no se haya omitido alguna de las ecuaciones del problema, es decir, función objetivo, límites inferiores y superiores de las variables de optimización, y muy importante, las restricciones a considerar. Validado este punto, es posible ejecutar el algoritmo para obtener una solución para el problema.

3.4 Validar e interpretar los resultados

Una vez que se ha encontrado una solución del problema, el siguiente paso es validar e interpretar resultados. En la sección 2 se abordaron las restricciones del problema, relaciones matemáticas que se deben cumplir para el problema en cuestión. La validación de resultados implica revisar que efectivamente la solución encontrada cumpla con todas las limitaciones del problema, ya

sea relaciones de igualdad o desigualdad. Es importante mencionar que para que una solución sea considerada como óptima, debe satisfacer el conjunto de restricciones y también generar el menor valor de la función objetivo. Al revisar este punto es un buen momento para analizar la coherencia de los resultados. Si estos están apegados a la realidad o, por el contrario, indican escenarios físicamente inviables. Si se llegara a presentar esta última situación, es necesario realizar una revisión detallada de la formulación del problema (función objetivo, variables de optimización y restricciones), así como la implementación computacional del algoritmo y/o su adecuada aplicación. Una vez que se determine una solución factible, es aconsejable presentar el conjunto de resultados utilizando tablas o elementos visuales como gráficos y figuras. Estos recursos permiten que la persona encargada de la toma de decisiones pueda evaluar el escenario del problema de una manera ordenada y efectiva.

A continuación, se presenta un problema de optimización ilustrativo resuelto paso por paso utilizando la secuencia de solución mostrada en la Figura 3.

3.5 Ejemplo resuelto. ¿La ensalada ideal? *Encontremos la combinación perfecta*

Una cocinera de un prestigioso restaurante desea crear una balanceada combinación de frutas y vegetales para elaborar una nueva receta para el menú de ensaladas del establecimiento. La idea principal consiste en una base de lechuga y espinaca, adicionando queso de cabra, mango fresco y nuez pecana finamente picada. En general, el tamaño estándar de los platillos disponibles en el menú de ensaladas ronda entre 330 y 350 g, por lo que la nueva receta debe encontrarse dentro de este rango. Por experiencia, la cocinera considera que la base lechuga-espinaca debe mantener una proporción de 40 % y 30 % respecto al peso total de la receta, respectivamente. El contenido restante del platillo estará compuesto de queso, mango y nuez.

El restaurante mantiene una inquebrantable política de frescura donde establece que para todas las ensaladas del menú se debe utilizar 40 g de fruta fresca como mínimo, por lo que la cocinera debe considerar esta restricción en la creación del nuevo platillo.

Además de estas características, la autoridad local establece cierta composición

nutrimental que deben cumplir los alimentos que se preparan en establecimientos de comida. Acatando estos lineamientos, la ensalada debe contener al menos 300 miligramos de calcio, 150 miligramos de magnesio y 1000 miligramos de potasio. En la Tabla 1 se presenta la totalidad de ingredientes de la ensalada, así como la cantidad de minerales requerida por gramo de ingrediente y el precio por gramo.

La tarea de la cocinera consiste en encontrar la cantidad de gramos de cada uno de los ingredientes del platillo que cumplan con las restricciones del problema, es decir, las limitaciones impuestas tanto por el restaurante como por la autoridad local, y que al mismo tiempo impliquen el mínimo costo posible.

De acuerdo con la estrategia de resolución presentada en la Figura 3, lo primero que se debe realizar es definir el problema de optimización. La finalidad es minimizar el costo de elaboración de la nueva ensalada cumpliendo con las restricciones mencionadas. El costo de la ensalada se determina por la cantidad de gramos de cada uno de los ingredientes. Estas cantidades serán las variables de optimización del problema.

Tabla 1. Contenido de minerales y precio por gramo de ingrediente del nuevo platillo.

Ingrediente	Miligramos de mineral por g de ingrediente			Precio/g, \$
	Calcio	Magnesio	Potasio	
Lechuga	0.33	0.13	1.94	0.027
Espinaca	0.99	0.79	5.58	0.051
Queso de cabra	2.98	0.20	0.46	0.335
Mango fresco	0.11	0.10	1.68	0.035
Nuez pecana	0.98	1.58	4.41	0.250



Entonces, la función objetivo se puede definir como:

$$\begin{aligned} \min F(L, E, Q, M, N) = & \quad (10) \\ & L \cdot \text{precio lechuga} \\ & + E \cdot \text{precio espinaca} \\ & + Q \cdot \text{precio queso de cabra} \\ & + M \cdot \text{precio mango} \\ & + N \cdot \text{precio nuez pecana} \end{aligned}$$

donde L son los gramos de lechuga, E los gramos de espinaca, Q los gramos de queso de cabra, M los gramos de mango y N los gramos de nuez pecana. Además de los gramos de cada ingrediente, el precio de cada ingrediente también se considera para determinar el valor de la función objetivo.

Una vez establecido el objetivo, la siguiente etapa consiste en definir las restricciones del problema. Las recetas de ensaladas del

restaurante deben de estar entre 330 y 350 g, condición que podemos expresar como

$$330 \text{ g} \leq \text{peso ensalada} \leq 350 \text{ g} \quad (11)$$

donde el peso de la ensalada se determina por la suma del peso de cada uno de sus ingredientes

$$\text{peso ensalada} = L + E + Q + M + N \quad (12)$$

La proporción de la base lechuga-espinaca debe ser por lo menos de 40-30 %, respectivamente

$$\% \text{ de lechuga} \geq 40 \% \quad (13)$$

$$\% \text{ de espinaca} \geq 30 \% \quad (14)$$

La receta debe contener por lo menos 40 g de fruta fresca, en este caso mango

$$M \geq 40 \text{ g} \quad (15)$$

Finalmente, el contenido nutricional del nuevo platillo debe cumplir con

$$\text{calcio} \geq 300 \text{ miligramos} \quad (16)$$

$$\text{magnesio} \geq 150 \text{ miligramos} \quad (17)$$

$$\text{potasio} \geq 1000 \text{ miligramos} \quad (18)$$

La cantidad de cada mineral se puede determinar utilizando la Tabla 1, resultando en las siguientes expresiones

$$\text{calcio} = 0.33L + 0.99E \quad (19)$$

$$+2.98Q + 0.11M$$

$$+0.98N$$

$$\text{magnesio} = 0.13L + 0.79E \quad (20)$$

$$+0.20Q + 0.10M$$

$$+1.58N$$

$$\text{potasio} = 1.94L + 5.58E \quad (21)$$

$$+0.46Q + 1.68M$$

$$+4.41N$$

Con esta información, se ha terminado de definir el problema de optimización. El siguiente paso es implementar el método de resolución y resolver.

Este tipo de problema se puede abordar efectivamente utilizando el complemento Solver de Microsoft Excel®. Esta herramienta ofrece robustas estrategias numéricas para resolver problemas de optimización, siendo una excelente opción de fácil acceso para el público en general.

Las ecuaciones (10)-(21) se formulan dentro de una hoja de cálculo, para posteriormente utilizar el algoritmo *Generalized Reduced Gradient (GRG) Nonlinear* disponible en el complemento Solver de Excel®. Los lectores interesados pueden consultar el manual de Harmon (2012) que ofrece una guía paso a paso sobre cómo utilizar esta herramienta para resolver problemas de optimización. En la Tabla 2 se presentan los resultados del problema y la distribución de los ingredientes en la receta final, ver Figura 5.

Tabla 2. Resultados del problema.

Receta final	
Ingrediente	Gramos
Lechuga	140.00
Espinaca	106.84
Queso de cabra	40.87
Mango	40.00
Nuez pecana	22.29

Valor de la función objetivo: \$29.89

Los resultados mostrados en la Tabla 2 indican que se ha encontrado una solución factible para el problema, ya que todas las restricciones se cumplen. Para lograr un costo de \$29.89 por porción de ensalada con un balance nutricional apegado a la normativa, se requiere combinar la cantidad de gramos

indicada en la Tabla 2 para cada uno de los ingredientes de la receta.

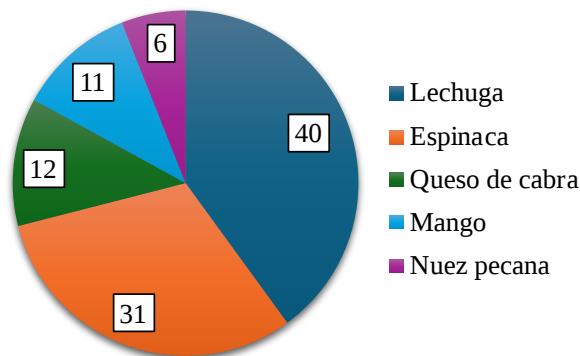


Figura 5. Distribución porcentual de los ingredientes de la receta.

Este ejemplo ilustrativo muestra cómo se puede utilizar la optimización para resolver un problema de toma de decisiones a través de cuatro pasos principales: definir el problema de optimización, seleccionar el método de resolución, implementar el método de resolución y validar e interpretar los resultados.

Resolver problemas con matemáticas puede ser una actividad apasionante y divertida, así que la próxima vez se podrá formular la pregunta, ¿de qué forma podría usarse la optimización para solucionar este problema?

Referencias bibliográficas

Antoniou, A., & Lu, W.-S. (2021). *Practical Optimization: Algorithms and Engineering Applications*. Springer.

Deb, K. (2012). *Optimization for engineering design: Algorithms and examples*. PHI Learning Private Limited.

Harmon, M. (2012). *Step-by-step optimization with Excel Solver: The Excel statistical master*. Excel Master Series.

Martins, J.R.R.A., & Ning, A. (2021). *Engineering Design Optimization*. Cambridge University Press.

Nocedal, J., & Wright, S.J. (2006). *Numerical Optimization*. Springer.

INFORMACIÓN ADICIONAL

Declaración sobre el uso de inteligencia artificial

En la preparación de este documento no se utilizaron grandes modelos de lenguaje para la redacción directa del texto. Se utilizó el ambiente Perplexity como apoyo para corrección gramatical y búsqueda de errores, así como para validación conceptual del

contenido. La versión final del texto es responsabilidad de los autores.

Todas las imágenes utilizadas en el documento, excepto las Figuras 3 y 5, fueron obtenidas utilizando Nano Banana, un modelo de generación de imágenes disponible en <https://gemini.google.com>. También se utilizaron íconos gratuitos con atribución disponibles en <https://www.flaticon.com>.

Las Figuras 3 y 5 son creaciones originales de los autores. La primera de ellas fue elaborada utilizando la fuente Chalkboy a través de una licencia gratuita para uso personal sin fines comerciales disponible en <https://www.1001fonts.com/chalkboy-font.html> y un diseño de flechas gratuito con atribución diseñado por freepik.com (<https://bit.ly/4eVHRgP>).